20.05.2020

Kompleks Fonk. Teo. Giriş Dersi Final Sınavı Yanıt Anahtarı

1) $(-1+i)^{3+i} = e^{(3+i)\,Log(-1+i)} = e^{(3+i)\,(\ln|-1+i| + i\,Arg(-1+i))}$

$Arg(-1+i) = ?$

$Arg(-1+i) = Arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$\ln|-1+i| = \ln\sqrt{(-1)^2+1^2} = \ln\sqrt{2}$

$\Rightarrow (-1+i)^{3+i} = e^{(3+i)\,(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4})} = e^{(3\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}) + i(\frac{9\pi}{4} + \ln\sqrt{2})}$

2) $u_x = 6xy + 4x$ $\qquad u_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y$

$u_{xx} = 6y + 4$ $\qquad u_{yy} = -6y - 4$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 6x + 4 - 6y - 4 = 0$ olduğundan, u harmoniktir.

u nun harmonik eşleniği, Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayacaktır. Yani

$v_y = u_x = 6xy + 4x$

$v_x = -u_y = -3x^2 + 3y^2 + 4y$ olur. O halde

$v_y = 6xy + 4x \Rightarrow v(x,y) = \int (6xy+4x)\,dy = 3xy^2 + 4xy + \varphi(x)$

$\Rightarrow v_x = 3y^2 + 4y + \varphi'(x)$ bulunur.

$v_x = -u_y$ olduğundan $3y^2 + 4y + \varphi'(x) = -3x^2 + 3y^2 + 4y$

$\varphi'(x) = -3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = -x^3 + c, \; c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c, \; c \in \mathbb{R}$, u nun harmonik eşleniğidir. Aranan analitik fonksiyon ise

$$f(z) = (3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2) + i(3xy^2 + 4xy - x^3 + c)$$

fonksiyondur.

3) $z = x + iy$ denirse

$$(1-i)\bar{z} + (1+iz) = 0 \Rightarrow (1-i)(x-iy) + (1+i)(x+iy) = 0$$

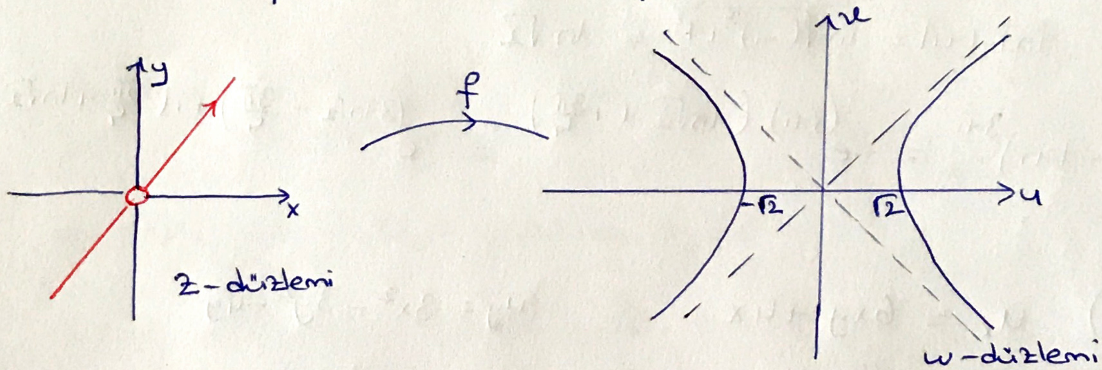
$$\Rightarrow (x-y) + i(-y-x) + (x-y) + i(y+x) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

olup, A kümesi

$$A = \{ x+ix \mid x \in \mathbb{R} - \{0\} \}$$ şeklinde de yazılabilir.



A kümesinin $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + \frac{1}{z}$ dönüşümü

altındaki görüntüsü

$$w = u + iv = f(x+ix) = (x+ix) + \frac{1}{x+ix} = x(1+i) + \frac{1}{x(1+i)}$$

$$= x(1+i) + \frac{1-i}{2x} = \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(x - \frac{1}{2x}\right)i$$

$$\Rightarrow u = x + \frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad u^2 = x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$$

$$v = x - \frac{1}{2x} \qquad\qquad v^2 = x^2 - 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$$-$$

$$u^2 - v^2 = 2$$ hiperbolü bulunur.

(görüntü yukarıda çizilmiştir.)

4) $z = x+iy \Rightarrow$

$$f(z) = \left((x+iy)^2 - 1\right) \cdot \mathrm{Re}(x+iy) = \left(x^2 - y^2 - 1 + 2xyi\right) x$$

$$= (x^3 - y^2x - x) + 2x^2yi$$

$u(x,y) = x^3 - y^2x - x$, $v(x,y) = 2x^2y$

$u_x = 3x^2 - y^2 - 1$ $\qquad v_x = 4xy$

$u_y = -2yx$ $\qquad v_y = 2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \Rightarrow 3x^2 - y^2 - 1 = 2x^2 \\ \qquad x^2 - y^2 = 1 \\ u_y = -v_x \Rightarrow -2xy = -4xy \Rightarrow xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$xy = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $y = 0$ olur.

Eğer $x=0$ ise $x^2 - y^2 = 1$ denkleminden $y^2 = -1$ olur. Bu ise mümkün değildir. O halde $y=0$ olmak zorundadır.

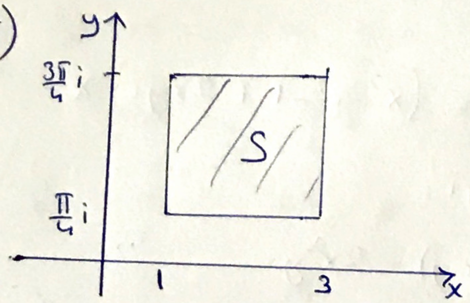
$y = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

olup, Cauchy-Riemann denklemleri $z = -1 + 0i = -1$ ve $z = 1 + 0i = 1$ noktalarında sağlanır. $\Rightarrow$ Fonksiyon bu noktalarda türevlenebilirdir. Ancak bu noktaların komşuluğunda f nin türevlenebildiği bir komşuluk olmadığından, f hiçbir yerde analitik değildir. Yine

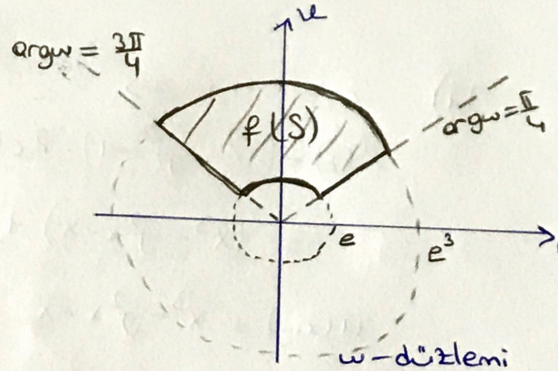
$$f'(-1) = f'(-1,0) = u_x(-1,0) + i v_x(-1,0) = 2$$

$$f'(1) = f'(1,0) = u_x(1,0) + i v_x(1,0) = 2$$ bulunur.

5)



z-düzlemi



w-düzlemi

- $x=1$, $\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{3\pi}{4}$ dikey doğrusunun $w=e^z$ altındaki görüntüsü

  $|w| = e^1 = e$, $\frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{4}$ yayına,

- $x=3$, $\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{3\pi}{4}$ dikey doğrusunun $w=e^z$ altındaki görüntüsü

  $|w| = e^3$, $\frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{4}$ yayına dönüşür.

- $y = \frac{\pi}{4}$, $1 \leq x \leq 3$ yatay doğrusu $e \leq |w| \leq e^3$ ve $\arg w = \frac{\pi}{4}$

  doğru parçasına,

- $y = \frac{3\pi}{4}$, $1 \leq x \leq 3$ yatay doğrusu $e \leq |w| \leq e^3$, $\arg w = \frac{3\pi}{4}$

  doğru parçasına dönüşür.

f(S) görüntüsü yukarıda çizildiği gibidir.

6) $z^3+1=0 \Rightarrow z^3=-1=\cos\pi + i\sin\pi$

$$\Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

$k=0$ için $\quad z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

$k=1$ için $\quad z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$k=2$ için $\quad z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$

$\Rightarrow$ fonksiyon z_0, z_1 ve z_2 noktalarında türevlenemez.

Ayrıca $\operatorname{Log}(3z-2+4i)$ fonksiyonu da

$$A = \mathbb{C} - \{z \mid \operatorname{Re}(3z-2+4i) \leq 0,\ \operatorname{Im}(3z-2+4i)=0\}$$
$$= \mathbb{C} - \{z \mid 3x-2 \leq 0,\ 3y+4=0\}$$
$$= \mathbb{C} - \{z \mid x \leq \tfrac{2}{3},\ y=-\tfrac{4}{3}\}$$

kümesi üzerinde türevlenebilirdir. O halde f fonksiyonu

$$\mathbb{C} - \left(\{z \mid x \leq \tfrac{2}{3}, y=-\tfrac{4}{3}\} \cup \{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i), -1, \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\}\right)$$

kümesi üzerinde türevlenebilirdir. Bu küme üzerindeki

türevi de

$$f'(z) = \frac{\frac{3}{3z-2+4i}(z^3+1) - 3z^2 . \operatorname{Log}(3z-2+4i)}{(z^3+1)^2}$$

$$= \frac{3(z^3+1) - 3z^2(3z-2+4i)\operatorname{Log}(3z-2+4i)}{(3z-2+4i)(z^3+1)^2}$$

olarak bulunur.